En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2 \quad \forall \alpha \in [1/4, 1/2]$$

$$|f_\alpha(t_1) - f_\alpha(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\beta$$

avec $$\beta = \frac{\text{Log}(1/\alpha)}{\text{Log}(4)}.$$

IV

Montrer que les applications $\alpha \mapsto K_\alpha$ et $\alpha \mapsto f_\alpha$ sont continues de $[1/4, 1/2]$ dans $\mathscr{K}$ et E respectivement.

(On pourra énoncer et démontrer un résultat général concernant les familles de contractions d'un espace complet qui implique ces deux résultats).

• • •

ENSET A1 Math 2 DURÉE : 4 heures

Soit k un corps commutatif. On note $k[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans k.

Soit n un entier ≥ 2. On note $M_n(k)$ l'algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans k, $GL_n(k)$ le sous-ensemble de $M_n(k)$ formé par les matrices inversibles, I_n la matrice identité. Si $M \in M_n(k)$, on note ^tM sa transposée.

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ dans k^n et soit $C = (c_{i,j})$ la matrice (n, n) définie par :

$c_{i,j} = 1$ si $1 \leq j \leq n - 1$ et $i = j + 1$
$c_{i,j} = a_j$ si $1 \leq i \leq n$ et $j = n$
$c_{i,j} = 0$ sinon.

Cette matrice est étudiée dans les trois parties du problème.

PARTIE I

I.1. Calculer le polynôme caractéristique de C.

I.2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de k^n. Déterminer l'expression de $C^i(e_1)$ sur cette base, pour $1 \leq i \leq n - 1$.

En déduire que $\{ I_n, C, \ldots, C^{n-1} \}$ est une partie libre de $M_n(k)$.

Montrer que tout polynôme P de $k[X]$, tel que $P(C) = 0$, est divisible par le polynôme caractéristique de C.

I.3. Soit $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ dans k^n ; on considère la matrice $S_\sigma = (s_{i,j})$ définie par :

$s_{i,j} = s_{i+j-n}$ si $i + j > n$
$s_{i,j} = 0$ sinon.

Montrer que S_σ est une matrice symétrique.

Calculer son déterminant.

I.4. Montrer qu'il existe un unique $\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dans k^n tel que $s_1 = 1$ et tel que la matrice $S_\sigma C$ est symétrique.

T.S.V.P.

E.N.S.E.T. Section A1-Math 1, Math 2
page 101

I.5. En déduire qu'il existe une matrice symétrique inversible T et une matrice symétrique R telles que $C = TR$.

I.6. Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible T telle que $C = T^tCT^{-1}$.

I.7. Calculer la matrice S_a de I.5 dans le cas où

$$a_n = 2\ ,\ a_{n-1} = -1 \text{ et } a_i = 0\ ,\ \forall i \leq n-2\ .$$

PARTIE II

II. Dans cette partie, on suppose que k est un corps de caractéristique différente de 2 et tel que :

$$\forall a \in k\ ,\ \exists b \in k\ /\ a = b^2\ .$$

II.1. Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de k^n.

Montrer qu'il existe x dans k^n tel que $B(x, x) = 1$.

En déduire qu'il existe une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de k^n dans laquelle la matrice de B est la matrice I_n.

II.2. Soit $M \in GL_n(k)$. Montrer l'équivalence des assertions :

a. La matrice M est symétrique ;

b. $\exists P \in GL_n(k)\ /\ M = {}^tPP$.

II.3. Montrer que C est semblable à une matrice symétrique.

II.4. Montrer que dans $M_n(k)$, les matrices symétriques ne sont pas en général diagonalisables. Donner un exemple de matrice symétrique non diagonalisable dans $M_n(k)$ lorsque k est le corps des nombres complexes.

PARTIE III

III. Dans cette partie, on suppose que $k = \mathbf{R}$ le corps des réels. On munit $M_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, de la topologie produit.

III.1. Soit Ω le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{R})$ des matrices M qui vérifient la propriété suivante :

Si P est un élément de $\mathbf{R}[X]$ tel que $P(M) = 0$, alors P est divisible par le polynôme caractéristique de M. Montrer que Ω est un ouvert.

III.2. Soit λ une valeur propre de C. Montrer que :

$$|\lambda| \leq \max\{1 + |a_i|\ ;\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

III.3. Soit $\{M_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de $M_n(\mathbf{R})$ telle que :

- M_i est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, pour tout i dans $\mathbf{N}$;
- la suite $\{M_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ converge vers C.

Montrer que :

a. $\exists l \in \mathbf{N}\ /\ \forall m \geq l$, M_m a n valeurs propres distinctes deux à deux.

b. $\exists K \in \mathbf{R}^+\ /\ \forall m \in \mathbf{N}, \forall \lambda$ valeur propre de M_m, on a : $|\lambda| \leq K$.

c. Soit $m \geq l$. On note $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ les n valeurs propres de M_m rangées dans l'ordre croissant.

Montrer que la suite $\{\lambda_i^m\}_{m \geq l}$ converge, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ et que le polynôme caractéristique de C admet ses n racines dans $\mathbf{R}$.

III.4. Donner un exemple de matrice de $M_n(\mathbf{R})$ qui n'est pas la limite d'une suite de matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$.

• • •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail